Dr. Christian Scheunert, 09.01.2025

5. Exercise on Convex Optimization

Problem 16: (Optimierungsproblem)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m \leq n$ eine Matrix mit $\text{rank}(A) = m$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Lösen Sie das konvexe Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad \text{s.t.} \quad Ax = b$$

unter Verwendung der KKT-Bedingungen.

Hint: Gemäß Voraussetzung ist $AA' \in \mathbb{R}^{m,m}$ invertierbar.

Problem 17: (Optimierungsproblem)

Seien $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische, invertierbare Matrix, $e \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}$. Ferner seien $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m \leq n$ eine Matrix mit $\text{rank}(A) = m$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2}\|Sx - ae\|^2 \quad \text{s.t.} \quad Ax = b$$

unter Verwendung von Problem 16 und der Substitution $y = Sx - ae$.

Problem 18: (Duales Problem)

Seien $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ und $D := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i' x_i < b_i, i = 1, \ldots, m\}$. Leiten Sie das duale Problem zum Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad -\sum_{i=1}^{m} \log(b_i - a_i' x)$$

her. Führen Sie zur Lösung der Aufgabe zunächst neue Variablen y_i und die Gleichheitsnebenbedingungen $y_i = b_i - a_i' x$ ein.

Problem 19: (Optimierungsproblem)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $\text{rank}(A) = n$, $G \in \mathbb{R}^{p,n}$ mit $\text{rank}(G) = p$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $h \in \mathbb{R}^p$. Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \|Ax - b\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & Gx = h, \end{aligned}$$

und leiten Sie dazu die KKT-Bedingungen sowie mathematische Ausdrücke für die Lösungen des ursprünglichen und des dualen Problems her.

Hint: Gemäß Voraussetzung sind $A'A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $GG' \in \mathbb{R}^{p,p}$ invertierbar.