

4. Exercise on Convex Optimization

Problem 12: (Dualität)

Betrachten Sie das Problem

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} \quad & x^2 + 1 \\ \text{s.t.} \quad & (x - 2)(x - 4) \leq 0. \end{aligned}$$

- Gegeben Sie die Menge gültiger Punkte, den optimalen Punkt x^* und den optimalen Wert p^* an.
- Stellen Sie die Zielfunktion über x grafisch dar. Zeichnen Sie in die gleiche Grafik die Menge der gültigen Punkte, den optimalen Punkt, den optimalen Wert sowie die Lagrange Funktion $L(x, \lambda)$ für $\lambda \in \{1, 2, 3\}$ ein. Verifizieren Sie die Eigenschaft $p^* \geq \inf_x L(x, \lambda)$ für $\lambda \geq 0$. Bestimmen Sie die duale Lagrange Funktion und stellen sie diese in einer weiteren Abbildung grafisch dar.
- Geben Sie das duale Problem an und verifizieren Sie, daß es sich dabei um ein konkaves Maximierungsproblem handelt. Bestimmen Sie den optimalen Punkt λ^* und den optimalen Wert d^* des dualen Problems. Liegt starke Dualität vor?

Problem 13: (Minimierungsproblem)

Seien $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ positiv definit und $c \in \mathbb{R}^n$ mit $c \neq 0$. Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c'x \\ \text{s.t.} \quad & x'Ax \leq 1. \end{aligned}$$

- Zeigen Sie, daß dieses Optimierungsproblem konvex ist.
- Lösen Sie das Optimierungsproblem mit Hilfe der Substitution $y = A^{1/2}x$.

Problem 14: (Entropy Maximization Problem)

Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $b \in \mathbb{R}^m$. Consider the entropy maximization problem

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & f_0(x) = - \sum_{i=1}^n x_i \log x_i \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \\ & \mathbf{1}'x = 1, \end{aligned} \tag{0.1}$$

where $\text{dom } f_0 = \mathbb{R}_{++}^n$. Find the conjugate function f_0^* of f_0 and the dual function g of the primal problem (0.1). Moreover, derive the dual problem of (0.1), check if it suffices Slater's condition, and convert it to a geometric program.

Problem 15: (Water-Filling Problem)

Let $a_1, \dots, a_n > 0$. Consider the water-filling problem

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_0(x) = - \sum_{i=1}^n \log(a_i + x_i) \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0 \\ & \mathbf{1}'x = 1. \end{aligned}$$

Show that the KKT conditions for this problem can be solved. Further, solve the water-filling problem and illustrate the solution.