Dr. Christian Scheunert, 28.11.2024

3. Exercise on Convex Optimization

Problem 8: (Konvexer Gradient und monotone Funktionen)

Eine Funktion $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt monoton, wenn für alle $x, y \in \mathrm{dom}(\theta)$ gilt

$$[\theta(y) - \theta(x)]'(y - x) \geq 0.$$

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare konvexe Funktion. Zeigen Sie, daß ∇f monoton ist.

Problem 9: (Konvexität zweimal stetig differenzierbarer Funktionen)

Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2/y$ konvex ist.

Problem 10: (Posynomials)

A posynomial is a function of positive scalar variables $y_1, \ldots, y_n$ of the form

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_1^{a_{i1}} \ldots y_n^{a_{in}},$$

where a_{ij} and β_i are scalars, such that $\beta_i > 0$ for all i. Show that:

a) A posynomial need not to be convex.

b) By a logarithmic change of variables, where we set

$$f(x) = \ln\bigl[g(y_1, \ldots, y_n)\bigr], \quad b_i = \ln \beta_i, \quad x_j = \ln y_j,$$

we obtain a convex function

$$f(x) = \ln \exp(Ax + b), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

where $\exp(z) = e^{z_1} + \cdots + e^{z_m}$ for all $z \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with entries a_{ij}, and $b \in \mathbb{R}^m$ with components b_i.

c) Every function $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ of the form

$$g(y) = g_1(y)^{\gamma_1} \ldots g_r(y)^{\gamma_r},$$

where g_k is a posynomial and $\gamma_k > 0$ for all k, can be transformed by a logarithmic change of variables into a convex function f given by

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \ln \exp(A_k x + b_k),$$

with the matrix A_k and the vector b_k being associated with the posynomial g_k for each k.

Problem 11: (Dualität)

Sei $D := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$. Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\min_{(x,y)\in D} \quad \exp(-x) \quad \text{s.t.} \quad x^2/y \leq 0.$$

a) Zeigen Sie, daß dies ein konvexes Optimierungsproblem ist und geben Sie die zugehörige Menge gültiger Punkte sowie den optimalen Wert p^* an.

b) Geben Sie das duale Problem an und bestimmen Sie dessen optimale Lösung λ^* und dessen optimalen Wert d^*. Wie groß ist der duale Abstand?

c) Liegt starke Dualität vor? Wenn nein, begründen Sie warum dies nicht der Fall ist.